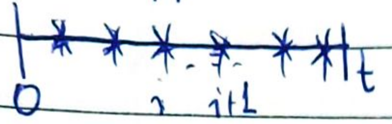
Εκθετική Κατανομή

Έστω διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda > 0$

αφίξεις Poisson



Έστω $N(t)$ παριστάνει το πλήθος των αφίξεων $(*)$ στο διάστημα $(0,t)$

Τότε $N(t) \sim P(\lambda t)$, $\lambda > 0$

$$P_{N(t)}(r) = P(N(t)=r) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{r}}{r!}, \quad r = 0,1,2,\ldots \equiv \mathbb{N}$$

Έστω ότι ενδιαφερόμαστε για το χρόνο X που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων στη διαδικασία Poisson (έστω X ο χρόνος μεταξύ των i και $i+1$ αφίξεων ή ο χρόνος μέχρι την 1η άφιξη)

Ο χρόνος X είναι τ.μ με τιμές $x \geq 0$

Άρα X συνεχής τ.μ. Ζητείται η κατανομή της τ.μ X

Στοχεύω στην αδκ της X

$$P\begin{pmatrix} X > x \\ \text{για } x \geq 0 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \text{ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών} \\ \text{αφίξεων είναι } > x \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \text{καμία άφιξη} \\ \text{σε χρόνο } x \end{pmatrix}$$

$$= P\begin{pmatrix} \text{Το πλήθος των αφίξεων} = 0 \\ \text{σε χρόνο } x \end{pmatrix} = P\left(N(x)=0\right) = P_{N(x)}(0) = \frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^{0}}{0!} = \boxed{e^{-\lambda x}}, \ x \geq 0$$

$$\Rightarrow 1 - P(X \leq x) = e^{-\lambda x} \Rightarrow P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x} \Rightarrow \boxed{F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}}, \ x \geq 0$$

SKAG

Για $x<0$ (δεν έχει νόημα) $F_X(x) = P(X \le x) = P(\emptyset) = 0$

Καταλήξαμε

$$\boxed{F_X(x)} = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$$

Επομένως,

$$\boxed{f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & \text{αλλού } (x<0) \end{cases}$$

αρχική συνάρτηση

Είναι η f_X σ.π.π? Ναι

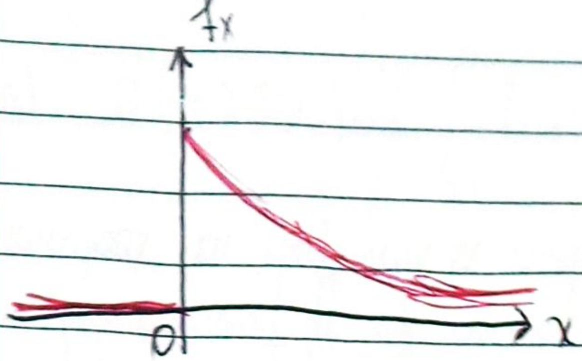
(1) $f_X(x) \ge 0$ και $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$

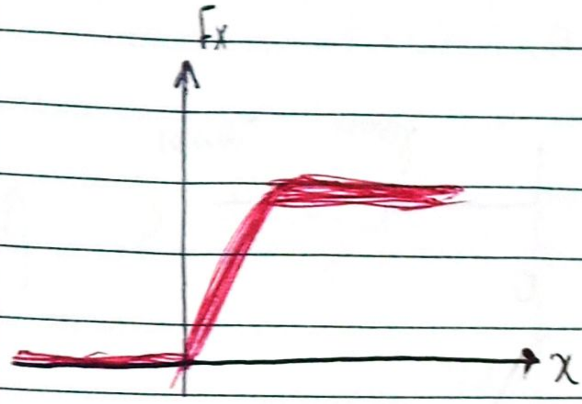
ΟΡΙΣΜΟΣ

Η τ.μ. X λέγεται εκθετική με παράμετρο λ ($\lambda>0$) αν το σύνολο τιμών της X είναι $x \ge 0$ και η σ.π.π. της X είναι:

$$\boxed{f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}}$$

Συμβολικά: $X \sim Εκθ(\lambda)$





Ιδιότητα Αμνησίας Εκθετικής Κατανομής

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω τ.μ. $X \sim Εκθ(\lambda)$, $\lambda > 0$. Για την X ισχύει:

$$P(X > x+x_0 \mid X > x_0) = P(X > x) \quad \text{για } x, x_0 > 0$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

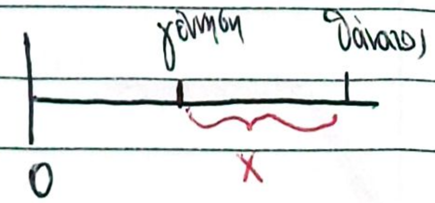
$$P(X > x+x_0 \mid X > x_0) = \frac{P(X > x+x_0 \text{ κ' } X > x_0)}{P(X > x_0)} = \frac{P(X > x+x_0)}{P(X > x_0)}$$

$$= \frac{1 - F_X(x+x_0)}{1 - F_X(x_0)} = P(X > x)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η τ.μ. $X \sim$ Εκθ(λ) παριστάνει το χρόνο ζωής και επομένως η Εκθ(λ) χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση χρόνου ζωής.

Κατανομή Χρόνου Ζωής



Π.Χ

Ο χρόνος ζωής σε ώρες μιας συσκευής περιγράφεται από Εκθ$(\lambda = 500)$

α) P(η συσκευή να ζήσει περισσότερο από 500 ώρες)

β) P(-''- -''- μεταξύ 500 ωρών και 600)

γ) P(-''- -''- περισσότερο από 800 ώρες δεδομένου ότι έχει ήδη επιζήσει περισσότερο από 300 ώρες)

ΛΥΣΗ

Αν X = χρόνος ζωής τότε $X \sim$ Εκθ$(1/500)$

$$f_X(x) = \frac{1}{500} e^{-1/500 \cdot x}, \quad x \geq 0, \qquad F_X(x) = 1 - e^{-1/500\, x}, \quad x \geq 0$$

α) $P(X>500) \overset{σπ.π}{=} \int_{500}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{500}^{\infty} \frac{1}{500} e^{-1/500 \cdot x}\,dx$

ασκ |

$1 - F_X(500) = 1 - (1 - e^{-500/500}) = \boxed{e^{-1}}$

β) $P(500 < X < 600) \overset{σπ.π}{=} \int_{500}^{600} \frac{1}{500} e^{-x/500}\,dx$

ασκ |

$F_X(600) - F_X(500)$

$= \dots$

γ) $P(X>800 \mid X>300) \overset{αμνησίας}{=} P(X>500+300 \mid X>300) = P(X>300) = \dots$

Π.Χ

Αυτοκίνητο περνούν τις νυχτερινές ώρες από ένα πρατήριο για ανεφοδιασμό, 2 αυτοκίνητα περνάνε ανά 10 λεπτά. Αν ένα αυτοκίνητο εξυπηρετηθεί

P(Το πρατήριο να μένει χωρίς αυτοκίνητο για 16 λεπτά)

Έστω X ο χρόνος σε λεπτά μέχρι την άφιξη του επόμενου αυτοκινήτου. Επειδή το X παριστά χρόνο μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων το $X \sim Εκθ(λ)$, $λ = ?$

10 min 2 αυτοκ.
1 min $\lambda = ?$

$$\lambda = \frac{2}{10} = 0{,}2$$

$X \sim \text{Εκθ}(\lambda = 0{,}2)$

$f_X(x) = 2e^{-2x}, \quad x \geq 0$

$F_X(x) = 1 - e^{-2x}, \quad x \geq 0$

$P(X > 16) = 1 - F_X(16) = e^{-3.2}$

Κατανομή Erlang - Κατανομή Γάμμα

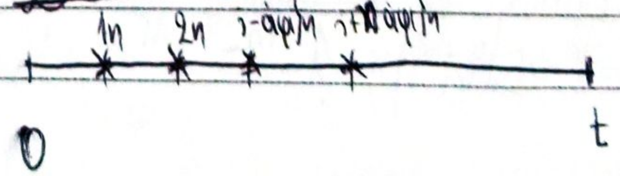
Συνάρτηση ή Ολοκλήρωμα Γάμμα

$$\Gamma(a) \overset{\text{ορ.}}{=} \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx, \quad a > 0$$

$$\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1), \quad a > 1$$

Αν $a \in \mathbb{N}$ τότε $\Gamma(n) = (n-1)!$

Θεωρούμε διαδικασία Poisson με ρυθμό λ



Έστω X ο χρόνος από την πραγματοποίηση της i-άφιξης μέχρι την $(i+n)$ άφιξη ή έστω X ο χρόνος από την αρχή της διαδικασίας μέχρι την n-άφιξη (Αν $n=1$ τότε το X εκφράζει τα ίδια με την Εκθετική)

Ο χρόνος X είναι μια τ.μ με τιμές $x \geq 0$
Ενδιαφέρον: εύρεση μελέτη της κατανομής της συνεχούς τμ X

Στηρίζομαι στη διαδικασία Poisson και ειδικότερα στο πλήθος $N(t)$ των αφίξεων (*) στο $(0,t)$ το οποίο ακολουθεί $P(\lambda t)$ και έχει σ.π

$$P_{N(t)}(\tau) = P(N(t)=\tau) = \frac{e^{-\lambda t} \cdot (\lambda t)^{\tau}}{\tau!}, \quad \tau = 0,1,2,\ldots$$

Για την εύρεση της κατανομής της τ.μ X θεωρώ την $P(X>x)$ για $x \geq 0$

$$P(X > x) = P\begin{pmatrix}\text{το πολύ } n-1 \text{ αφίξεις} \\ \text{σε χρόνο } x\end{pmatrix} = P(N(x) \leq n-1)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} P(N(x)=k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda x} \cdot (\lambda x)^{k}}{k!}$$

Άρα, $P(X>x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda x} (\lambda x)^{k}}{k!}$ και επομένως επειδή

$F_X(x) = 1 - P(X>x)$ έχουμε: $F_X(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda x} \cdot (\lambda x)^{k}}{k!}, \quad x \geq 0$

και $F_X(x) = 0, \quad x < 0$

Μπορώ να βρω την σ.π.π της X? ΝΑΙ

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{d}{dx}\left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^k}{k!}\right)$$

όπου $x \geq 0$

και $f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{d}{dx} 0 = 0 \quad , x < 0$

Μετά από πράξεις (παραγώγιση) η f_X φθάνει στη μορφή:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \cdot x^{n-1} \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Είναι η $f_X(x)$ σ.π.π?

(i) $f_X(x) \geq 0$ ισχύει

(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$

ΟΡΙΣΜΟΣ (Κατανομή Erlang)

Εστω η τ.μ X παριστά το χρόνο που μεσολαβεί από την πραγματοποίηση μεταξύ i-άφιξης μέχρι και την πραγματοποίηση της $(i+n)$ άφιξης, $n \in \mathbb{N}-\{0\}$ σε μια διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda>0$. Τότε η τ.μ X και συνεχής με σ.π.π:

$$f_X(x)=\begin{cases} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x} &, x\geq 0 \\ 0 &, x<0 \end{cases}$$

και α.σ.κ:

$$F_X(x)=\begin{cases} 1-\sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^k}{k!} &, x\geq 0 \\ 0 &, x<0 \end{cases}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

① Η Erlang γενικεύει την εκθετική. Πράγματι, αν $n=1$:

$$f_X(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} &, x\geq 0 \\ 0 &, x<0 \end{cases}$$

② Εστω ότι ζητείται η $P(X>t)$, όπου $X \sim Erlang(n,\lambda)$

Από 3ο Κεφάλαιο: $P(X>t)=\int_t^{\infty} f_X(x)\,dx=\int_t^{\infty}\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}x^{n-1}e^{-\lambda x}\,dx$ (*)

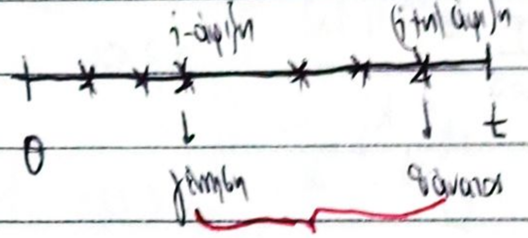
το οποίο δεν υπολογίζεται σε κλειστή μορφή.

Αλλά $P(X>t) = 1 - F_X(t) = 1 - \left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}\right)$ (**)

Από (*), (**) αν $X \sim Erlang(n,\lambda)$ τότε:

$$P(X>t) = \int_t^{\infty} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x}\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$$

4) Η Erlang ως κατανομή χρόνου ζωής



X = χρόνος ζωής μοντελοποιημένος από την Erlang

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η τ.μ X λέγεται γάμμα με παραμέτρους α και β $(\alpha,\beta>0)$ αν οι τιμές της τ.μ X είναι $x \geq 0$ και η σ.π.π της X είναι:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^{\alpha}\cdot\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-x/\beta}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Συμβολισμός $X \sim G(\alpha,\beta)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

① Αν $a = n \in \mathbb{N} - \{0\}$ και $b = \frac{1}{\lambda}$ τότε $G(a, b) = Erlang(n, \lambda)$

Αν $n = 1$ $G(a, b) = G\left(1, \frac{1}{\lambda}\right) = Erlang(1, \lambda) = Εκθ(\lambda)$

$b = \frac{1}{\lambda}$

② α.σ.κ F_X της $G(a, b)$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{b^a \Gamma(a)} t^{-1} e^{-t/b}\, dt$$

$$\overset{y = t/b}{=} \int_{-\infty}^{x/b} \frac{1}{\Gamma(a)} y^{a-1} e^{y}\, dt$$

Δεν υπάρχει σε κλειστή μορφή

Πχ

Ρυθμός 2 πελάτες ανά λεπτό

α) P (να φθάσουν στο ταμείο λιγότερο από 2 πελάτες σε διάστημα 3min)

β) P (Αν έναι πελάτης εξυπηρετηθεί να μείνει το ~~ταμ~~ ταμείο χωρίς πελάτη περισσότερο από 2min)

γ) Αν έναι πελάτης εξυπηρετηθεί P (ο χρόνος που θα χρειαστεί για την άφιξη του επόμενου πελάτη να είναι μικρότερο από 3min)

ΛΥΣΗ

α) Έστω ότι X παριστά το πλήθος των πελατών που μπαίνουν στο ταμείο σε μονάδα χρόνου 3min

Τότε: $X \sim P(\lambda)$ οπότε $P_X(x) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, $x=0,1,2,\dots$, $\lambda>0$

1min 2πελάτες
3min $\lambda = ?$ $\Rightarrow \lambda = 6$ οπότε

$$P_X(x) = \frac{e^{-6}6^x}{x!}$$

β) $P(X<2) = P(X=0 \text{ ή } X=1) = P(X=0) + P(X=1)$
$= P_X(0) + P_X(1) = \dfrac{e^{-6}6^0}{0!} + \dfrac{e^{-6}\cdot 6^1}{1!}$

β) Έστω Y ότι παριστά το χρόνο σε λεπτά μέχρι την άφιξη στο ταμείο του αμέσως επόμενου πελάτη. Τότε:

$Y \sim \text{Εκθ}(\lambda)$, $\lambda>0$, $f_X(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$ $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

Αφού μονάδα χρόνου της Y θεωρώ το λεπτό, το $\lambda = 2$

$$P(Y>2) \overset{\alpha.\sigma\kappa}{=} 1 - F_X(x) = 1 - (1 - e^{-2\cdot 2}) = e^{-4}$$

$$\int_2^{\infty} 2e^{-2x}\,dx = e^{-4}$$

SKAG

γ) Έστω Z τ.μ που παριστάνει το χρόνο σε λεπτά μέχρι την άφιξη στο ταμείο του μεθεπόμενου πελάτη (δηλ. μέχρι την άφιξη $n=2$ διαδοχικών αφίξεων σε διαδικασία Poisson

$$Z \sim Erlang(n=2, \lambda=2)$$

$$P(Z<3) = F_Z(3) = 1 - \sum_{k=0}^{2-1} \frac{e^{-2\cdot 3}\cdot(2\cdot 3)^k}{k!} = 1-7e^{-6}$$

Επόμενη Τρίτη (ΟΧΙ ΜΑΘΗΜΑ)

ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΒΗΤΑ (ΟΧΙ SOS)

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ Η' ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΒΗΤΑ

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx \quad , a>0, b>0$$

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια τ.μ X λέγεται Βήτα με παραμέτρους a και b αν οι δυνατές τιμές της $x\in(0,1)$ και η σ.π.π της X είναι

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} & , 0<x<1 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

Συμβολισμός: $X \sim Beta(a,b)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

α) Αν $a=b=1$ τότε $Beta(1,1) = U(0,1)$

β) η α.σ.κ της $Beta(a,b)$ είναι:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \ x<0 \\ \int_0^x \frac{1}{B(a,b)} t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt & , \ 0\leq x<1 \\ 1 & , \ x\geq 1 \end{cases}$$

και $\nexists$ σε κλειστή μορφή